Deux notions équivalentes d'unicité en loi pour les équations différentielles stochastiques

Jean Brossard

Institut Fourier, BP 74, F-38 402 Saint-Martin d'Hères Cedex
e-mail: brossard@fourier.ujf-grenoble.fr

Summary. For a stochastic differential equation of the form

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_.)\,\mathrm{d}B_t + g(t, X_.)\,\mathrm{d}t, \qquad X_0 = x,$$

with B a Brownian motion, uniqueness in law can be defined in two different ways: the usual one (for all solutions $(X_., B_.)$ the law of $X_.$ is the same), and a stronger one (all solutions $(X_., B_.)$ have the same law). These two definitions are shown to be equivalent; more precisely, when the law of $X_.$ is extremal in the set of all laws of solutions, the law of $(X_., B_.)$ is determined by that of $X_.$.

Considérons une équation différentielle stochastique de forme très générale

$$(E_x) \qquad \begin{cases} \mathrm{d}X_t = f(t, X_.)\,\mathrm{d}B_t + g(t, X_.)\,\mathrm{d}t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Avec C. Leuridan, nous avions demandé à M. Yor si la notion d'unicité en loi (pour toutes les solutions $(X_., B_.)$, la loi de $X_.$ est la même) était différente de celle d'unicité « forte » en loi (toutes les solutions $(X_., B_.)$ ont même loi). M. Yor nous avait donné une réponse dans le cas où $X_.$ et $B_.$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$: ces deux notions sont équivalentes et on peut expliciter la loi de $B_.$ connaissant $X_.$ lorsqu'il y a unicité en loi. Le but de cette note est de présenter cette démonstration en l'adaptant au cas des dimensions quelconques et de montrer en outre que si $(X_., B_.)$ est une solution de (E_x) pour laquelle la loi de $X_.$ est extrémale, alors la loi de $(X_., B_.)$ est parfaitement déterminée par celle de $X_.$.

1 Notations et hypothèses

Soit x un point fixé de $\mathbb{R}^n$. Notons Ω_n^x l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ prenant la valeur x en 0, et $X^\circ_.$ le processus canonique sur Ω_n^x.

J. Azéma et al. (Eds.): LNM 1832, pp. 246–250, 2003.

$\mathcal{L}(m,n)$ désignera l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et I_n l'application identité dans $\mathbb{R}^n$. On appellera $\tilde{A} \in \mathcal{L}(n,m)$ le transposé d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(m,n)$.

Dans l'équation différentielle stochastique (E_x) :

- x désigne un point fixé de $\mathbb{R}^n$;
- $X_. = (X_t)_{t\geqslant 0}$ désigne un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et $B_.$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^m$ issu de 0.
- f et g sont des applications prévisibles de $\mathbb{R}_+ \times \Omega_n^x$ respectivement dans $\mathcal{L}(m,n)$ et $\mathbb{R}^n$.

Pseudo-inverse. Si $A \in \mathcal{L}(m,n)$, on notera $A^\dagger$ son pseudo-inverse (cf. [1]), c'est-à-dire l'élément de $\mathcal{L}(n,m)$ dont le noyau est $(\operatorname{Im} A)^\perp$ et dont la restriction à $\operatorname{Im} A$ est l'inverse de la restriction de A à $(\operatorname{Ker} A)^\perp$. Ainsi, $AA^\dagger$ est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} A$, et $A^\dagger A$ le projecteur orthogonal sur $(\operatorname{Ker} A)^\perp$.

2 Énoncé du résultat principal

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble (convexe) des probabilités sur Ω_n^x pour lesquelles les intégrales $\int_0^t g(s, X_.^\circ)\,\mathrm{d}s$ et $\int_0^t f(s, X_.^\circ)\,\tilde{f}(s, X_.^\circ)\,\mathrm{d}s$ existent presque sûrement (au sens de Lebesgue sur $[0,t]$, pour tout t) et telles que $X_.^\circ$ soit une semi-martingale de partie à variation finie $\left(\int_0^t g(s, X_.^\circ)\,\mathrm{d}s\right)_{t\geqslant 0}$ et de crochet, en notations matricielles, $\left(\int_0^t f(s, X_.^\circ)\,\tilde{f}(s, X_.^\circ)\,\mathrm{d}s\right)_{t\geqslant 0}$. On pourrait préciser cette définition en spécifiant que la filtration considérée sur Ω_n^x est la filtration canonique (convenablement augmentée), mais ce n'est pas nécessaire : f et g étant prévisibles pour la filtration canonique, si la propriété a lieu pour quelque filtration que ce soit, la propriété a aussi lieu pour toute filtration plus petite à laquelle $X_.^\circ$ est adapté, et en particulier pour la filtration canonique.

Grâce à la remarque qui précède, il est clair que si $(X_., B_.)$ est une solution de (E_x), la loi de $X_.$ est dans $\mathcal{H}$. Inversement, le lemme suivant montre que $\mathcal{H}$ est exactement l'ensemble des premières lois marginales des solutions $(X_., B_.)$ de (E_x) ; c'est essentiellement le théorème de Stroock et Varadhan établissant le lien entre « solution faible » et « solution du problème de martingales ».

Lemme. *Soit $X_.$ un processus dont la loi appartient à $\mathcal{H}$ et $\beta_.$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^m$ indépendant de $X_.$. Posons*

$$M_t^X = X_t - \int_0^t g(s, X_.)\,\mathrm{d}s, \qquad \Phi_t = I_m - f^\dagger(t, X_.)\,f(t, X_.)$$

et

$$\bar{B}_t = \int_0^t f^\dagger(s, X_.)\,\mathrm{d}M_s^X + \int_0^t \Phi_s\,\mathrm{d}\beta_s.$$

Alors $\bar{B}_.$ est un mouvement brownien et $(X_., \bar{B}_.)$ une solution de (E_x).

Démonstration. Pour montrer que $\bar{B}_.$ est un mouvement brownien, calculons le processus (matriciel) $\langle \bar{B}, \bar{B} \rangle_t$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\big\langle \bar{B}, \bar{B} \big\rangle_t &= f^\dagger(t, X_.)\, \mathrm{d}\big\langle M^X, M^X \big\rangle_t \, \widetilde{f^\dagger}(t, X_.) + \Phi_t \tilde{\Phi}_t \, \mathrm{d}t \\ &= f^\dagger(t, X_.)\, f(t, X_.) \big(f^\dagger(t, X_.)\, f(t, X_.) \big)^{\sim} \mathrm{d}t + \Phi_t \, \tilde{\Phi}_t \, \mathrm{d}t \\ &= I_m \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

compte tenu du fait que Φ_t et $f^\dagger(t, X_.)\, f(t, X_.)$ sont des projecteurs orthogonaux sur des espaces supplémentaires.

Pour établir le deuxième point, montrons que $M_t^X - \int_0^t f(s, X_.)\, \mathrm{d}\bar{B}_s = N_t$ est une martingale locale dont le crochet $\langle N, N \rangle_t$ est nul :

$$\begin{aligned} dN_t &= \Psi_t \, \mathrm{d}M_t^X - f(t, X_.)\, \Phi_t \, \mathrm{d}\beta_t \qquad \text{où } \Psi_t = I_n - f(t, X_.)\, f^\dagger(t, X_.) \\ &= \Psi_t \, \mathrm{d}M_t^X \qquad \text{car } \Phi_t \text{ est le projecteur orthogonal sur } \operatorname{Ker} f(t, X_.). \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathrm{d}\langle N, N \rangle_t = \Psi_t \, \mathrm{d}\big\langle M^X, M^X \big\rangle_t \tilde{\Psi}_t = \Psi_t \, f(t, X_.)\, \tilde{f}(t, X_.)\, \tilde{\Psi}_t \, \mathrm{d}t = 0$$

car Ψ_t, projecteur orthogonal sur $\big(\operatorname{Im} f(t, X_.)\big)^\perp$, est nul sur $\operatorname{Im} f(t, X_.)$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal, dans lequel les processus $M_.^X$ et $\Phi_.$ sont définis comme dans l'énoncé du lemme :

Théorème. *Si $(X_., B_.)$ est une solution de (E_x) pour laquelle la loi de $X_.$ est extrémale dans $\mathcal{H}$, alors la loi de $B_.$ connaissant $X_.$ est celle de $\big(\int_0^t f^\dagger(s, X_.)\, \mathrm{d}M_s^X + \int_0^t \Phi_s \, \mathrm{d}\beta_s\big)_{t \geqslant 0}$ où $\beta_.$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^m$ indépendant de $X_.$.*

Corollaire. *Si (E_x) possède la propriété d'unicité en loi (i.e. si $\mathcal{H}$ possède au plus un élément), alors toutes les solutions $(X_., B_.)$ de (E_x) ont même loi.*

Remarque 1. Compte tenu de ce que, pour une E.D.S. sans condition initiale, l'unicité en loi équivaut à l'unicité en loi pour toutes les E.D.S. avec condition initiale fixée associées (cf. [2], IX, Prop. 1.4), ce corollaire est un peu plus général que son analogue pour les E.D.S. sans condition initiale.

Remarque 2 et exemple. Il est facile de construire un exemple d'E.D.S. où deux solutions $(X_.^1, B_.^1)$ et $(X_.^2, B_.^2)$ n'ont pas même loi bien que $X_.^1$ et $X_.^2$ aient même loi : sur l'espace canonique du mouvement brownien, soit T un temps d'arrêt et $X_t = [(t - T)_+]^2$.

$(X_., B_.)$ est solution de $\begin{cases} \mathrm{d}X_t = 2\sqrt{|X_t|}\, \mathrm{d}t \\ X_0 = 0 \end{cases}$, mais, à moins que T ne soit p.s. constant, elle n'a pas même loi que la solution $(X_., \bar{B}_.)$ fournie par le lemme, et pour laquelle T et $\bar{B}$ sont indépendants.

3 Démonstration du théorème

Cette démonstration suit les grandes lignes de celle de M. Yor dans le cas $m = n = 1$ à quelques détails près (utilisation du théorème de Girsanov au lieu du théorème de Douglas et petites complications dues aux dimensions m et n).

Considérons une solution $(X_., B_.)$ de (E_x). Nous allons montrer que la loi de $B_.$ connaissant $X_.$ est parfaitement déterminée pour peu que la loi de $X_.$ soit extrémale dans $\mathcal{H}$. Pour ce faire, nous allons calculer $E\big[e^{\int_0^\infty H_s\,\mathrm{d}B_s} \,\big|\, \sigma(X_.)\big]$ pour tout processus déterministe H borné à support compact à valeurs dans $\mathcal{L}(m,1)$. Comme

$$(I_m - \Phi_t)\,\mathrm{d}B_t = f^\dagger(t, X_.)\,\mathrm{d}M_t^X\ ,$$

$\int_0^\infty H_t(I_m - \Phi_t)\,\mathrm{d}B_t$ est $\sigma(X_.)$-mesurable. Il suffit donc de calculer

$$E\big[e^{\int_0^\infty H_t\Phi_t\,\mathrm{d}B_t} \,\big|\, \sigma(X_.)\big].$$

Pour cela, introduisons le mouvement brownien $\bar{B}_.$ défini comme dans le lemme à partir d'un mouvement brownien $\beta_.$ indépendant du couple $(X_., B_.)$; quitte à augmenter l'espace initial, on peut supposer tous ces processus définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Considérons la martingale exponentielle $D_t = e^{\int_0^t H_s\Phi_s\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|H_s\Phi_s\|^2\,\mathrm{d}s}$, et pour $A > 1$, $Q_A = D_{T_A}\cdot P$ où $T_A = \inf\{t \mid D_t = A\}$. La démarche est de montrer :

a) $(X_., B_.)$ est solution sous Q_A pour tout A ;

b) le point *a*) et l'extrémalité de la loi de $X_.$ impliquent :

$$E\big[e^{\int_0^\infty H_s\Phi_s\,\mathrm{d}B_s} \,\big|\, \sigma(X_.)\big] = e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty \|H_s\Phi_s\|^2\,\mathrm{d}s}.$$

Le point *b*) achève la démonstration, puisqu'il montre que la loi de $B_.$ connaissant $X_.$ est la même pour toutes les solutions $(X_., B_.)$.

Démonstration de a). Si $L \in \mathcal{L}(m,1)$, le crochet des deux martingales $\big(\int_0^{t\wedge T_A} H_s\Phi_s\,\mathrm{d}B_s\big)_{t\geqslant 0}$ et $L\bar{B}_.$ est nul car $L\bar{B}_. = \int_0^. L(I_m - \Phi_t)\,\mathrm{d}B_t + \int_0^. L\Phi_t\,\mathrm{d}\beta_t$. (Le crochet avec le deuxième terme est nul par indépendance de $B_.$ et $\beta_.$, et le crochet avec le premier vaut $\int_0^. L(I_m - \Phi_t)\tilde{\Phi}_t\tilde{H}_t\,\mathrm{d}t = 0$ car $(I_m - \Phi_t)\tilde{\Phi}_t = (I_m - \Phi_t)\Phi_t = 0$.) Le théorème de Girsanov permet donc d'affirmer que $\bar{B}_.$ reste un mouvement brownien sous Q_A, et, puisque l'intégrale stochastique $\int_0^t f(s, X_.)\,\mathrm{d}\bar{B}_s$ est la même sous P ou Q_A, que $(X_., \bar{B}_.)$ est solution sous Q_A, comme elle l'était sous P (lemme). □

Démonstration de b). La loi de $X_.$ sous Q_A est absolument continue par rapport à la loi de $X_.$ sous P, et sa densité h vérifie $h(X_.) = E[D_{T_A} \mid \sigma(X_.)]$. Si P_0 désigne la loi de $X_.$, $h \cdot P_0$ et $\frac{A-h}{A-1} \cdot P_0$ sont donc dans $\mathcal{H}$, et comme P_0 est extrémale et combinaison convexe des deux précédentes, nécessairement $h \equiv 1$. Donc

$$E\Big[\mathrm{e}^{\int_0^{T_A} H_s\Phi_s\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^{T_A}\|H_s\Phi_s\|^2\mathrm{d}s}\;\Big|\;\sigma(X_.)\Big] = 1.$$

L'uniforme intégrabilité des variables dont on prend l'espérance conditionnelle permet de passer à la limite quand $A \to +\infty$, et donc

$$E\Big[\mathrm{e}^{\int_0^{\infty} H_s\Phi_s\,\mathrm{d}B_s}\;\Big|\;\sigma(X_.)\Big] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\|H_s\Phi_s\|^2\,\mathrm{d}s},$$

ce qui achève la démonstration. □

Références

1. Bouillon (Th. L.) et Odell (P. L.), *Generalized inverse matrices*, Wiley (1971).
2. Revuz (D.) et Yor (M.), *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag, Berlin (1991).